Завдання для програмового навчання з алгебри та початків аналізу

Тема: Похідна, 11 клас.

Завдання І-1-1

1.Використовуючи означення похідної знайти похідні наступних функцій:

а) у =3 х+4. Знайти $y'(2);\ y'(\sqrt{5}.)$

б) у = x^2+5. Знайти $y'(-2);\ y'(-2{,}5).$

Розв'язання

а) Відомо, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'$ при $\Delta x \to 0$.

Знайдемо похідну функції по наступному алгоритму.

1) y($x_O + \Delta x) = 3$ … +4

2) $\Delta y = y(x_O + \Delta x) - y(x_O) =$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_O + \Delta x) - y(x_O)}{\Delta x} = \frac{\quad}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \to$ при $\Delta x \to 0$.

Так як $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не залежить від x_O, то $y'(2) = y'(\sqrt{5}) = \ldots$

б)у= $x^2 + 5$. Знайти $y'(-2);\ y'(-2{,}5).$

Відомо що $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'\ \ \Delta x \to 0$.

Знаходимо похідну функції в точці за наступним алгоритмом:

1) y (-2+ $\Delta x)$ =($\quad)^2 + 5 =$ … -4 $\Delta x +$ … +5

2) $\Delta y(-2) = y(-2+\Delta x) - y(-2) =$ … $\Delta x + \Delta x^2$

3) $\dfrac{\Delta y(-2)}{\Delta x} = \dfrac{-\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \ldots\Delta x$

$\dfrac{\Delta y(-2)}{\Delta x} \to \ldots$ при $\Delta x \to 0$. Тоді, $y'(-2) = \ldots$

1) y (-2,5+ $\Delta x) = ($ $)^2 + 5 = \ldots - 5\Delta x + \ldots + 5.$

2) $\Delta y(-2{,}5) = \ldots\Delta x + \Delta x^{2.}$

3) $\dfrac{\Delta y(-2)}{\Delta x} = \dfrac{-\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \ldots\Delta x$

$\dfrac{\Delta y(-2{,}5)}{\Delta x} \to -\ldots$ при $\Delta x \to 0$. Тоді,

Завдання - І-1-2

1.Знайдіть похідну функції:

а) x^{11}; б)$2x^5$; в)x^{-7}; г)$5x^{-4}$.

Розв'язання

Відомо, що для будь якого цілого n і будь якого x(x ≠ 0 при n≤1) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

$(cn)' = cn'$

а) $(x^{11})' = 11\dfrac{\ldots}{x} = 11x^{\cdots}$

б) $(2x^5)' = \ldots(x^5)' = 2*\ldots x^{5-} - = \ldots$

в) (x $^{-7})' = ...x-^{-1} = ...$

г) (5x $^{-4})' = ...(x^{-4})' = 5 * x^{-} = ...$

2.Знайдіть похідну функції:

а) 3 $\sqrt{x}$; б) 5 $\sqrt{x-7;}$ в) $\frac{1}{4\sqrt[3]{x}}$; г) $\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання

1. Відомо, що $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$.

Наприклад, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

2. За означенням степеня з від'ємним показником x $^{-p} = \frac{1}{x^p}$; Наприклад

$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$.

а) (3 $\sqrt{x})' = (3x\frac{1}{-})' = ...(x^{\frac{1}{2}})' = 3...x^{\cdots} = ...x^{\cdots}$

б) (2x $^{5})' = ...(x^{5})' = 2*...x^{5-} - = ...x^{\cdots}$

в) $(\frac{1}{4\sqrt[3]{x}})' = \frac{1}{4}(\frac{1}{x-})' = \frac{1}{4}(x^{-}-)' = \frac{1}{4}(...)x^{-} = -...x^{-}$.

г) $(\frac{2}{\sqrt{x}})' = (\frac{2}{x^{-}})' = (2*x-)' = 2*(...)x-^{-1} = ...x^{-}$.

3. Знайдіть похідну функцій:

а)5x $^{6} - 4x^3 + x - 8;$ б)3x $^{5} - \frac{1}{x^2}$; в) $\frac{1}{x} - 4x^7$.

Розв ‘язання

1. Відомо, що$(x^{n})' = nx^{n-1}$

2. За означенням степеня з від‘ємним показником $x^{-p} = \frac{1}{x^{p}}$;

Похідна суми рівн сумі похідних $(u+v)' = u' + v'$

а)$(5x^{6} - 4x^{3} + x - 8)' = (5x^{6})' -$

$(...)' + (...)' - (8)' = 5(x^{6})' - ...(x^{3})' +$

$(...)' = 5 \cdot ...x^{-} - 4 \cdot ...x^{-} + ... = ...x^{-} - ...x^{-} + 1.$

б)$(3x^{5} - \frac{1}{x^{2}})' = (...)' - (...)' = 3(...)' - (x^{-})' = ...x^{-} + \frac{1}{x^{-}}.$

в)$(\frac{1}{x} - 4x^{7})' = (x^{-})' - (4x^{7})' = ...x^{-} - 4 \cdot ...x^{-} = -\frac{1}{x^{-}} - ...x^{-}.$

Завдання-І-1-3

1. Знайдіть похідну функції:

а) (2х+1) $\sqrt{x}$; б) (1-3х) $\sqrt{x}$

Розв’язок:

1)Відомо, що похідна добутку знаходиться за формулою $(uv)' = u'v = uv'$

2) $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

3)Похідна суми дорівнює сумі похідних $(u+v)' = u' + v'$

$((2x+1)\sqrt{x})' = (...)'\sqrt{x} + (2x=1)(x^{-})' = \_x^{-} + (2x=1)$

а)

- $\_x^{-} = 2x^{\frac{1}{2}} + \_\_ + \frac{1}{2}x^{-} = \_\sqrt{x} + \frac{1}{\_\_}$

$$((1-3x)\sqrt{x})' = (...)'\sqrt{x} + (1-3x)(...)' = -\_\_\sqrt{x} =$$

б) $$= (1-3x)\_x^{-} = -3\sqrt{x} + \frac{1}{\_\sqrt{x}} - \_\sqrt{x} = \_\sqrt{x} + \frac{1}{\_\sqrt{x}}$$

2.Знайдіть похідну функції:

а) $\frac{1+3x}{2-5x}$; б) $\frac{4x-1}{3x+7}$; в) $\frac{2-5x}{1-7x}$;г) $\frac{x^2+1`}{2x+1}$

1)Відомо, що похідна частки знаходиться за формулою

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

2) $(cu)' = c(u')$; $(u+v)' = u' + v'$

а) $$\left(\frac{1+3x}{2-5x}\right)' = \begin{vmatrix} u = 1+3x \\ v = 2-5x \end{vmatrix} = \frac{(...)'(2-5x) - (1+3x)(...)'}{(...)^2} =$$

$$= \frac{\_(2-5x) - \_(1+3x)(...)}{(2-5x)^2} = \frac{\_}{(2-5x)^2} = \frac{11}{\_}.$$

б)

$$\left(\frac{4x-1}{3x+7}\right)' = \begin{vmatrix} u = \_\_\_ \\ v = \_\_\_ \end{vmatrix} = \frac{(4x-1)'(...) - (...)(3x+7)'}{(...)^2} = \frac{\_(3x+7) - (4x-1)\_}{(3x+7)^2} =$$

$$= \frac{\_x + \_ - \_x + 3}{(3x+7)^2} = \frac{\_}{(3x+7)^2}.$$

в) $\left(\dfrac{2-5x}{1-7x}\right)' = \dfrac{(...)'(...)-(2-5x)(...)'}{(...)^2} = \dfrac{\_(1-7x)-(2-5x)(...)}{(1-7x)^2} =$

$= \dfrac{-5+\_\,x+\_-\_\,x}{(1-7x)^2} = \dfrac{\_}{(1-7x)^2}.$

г)

$\left(\dfrac{x^2+1}{2x+1}\right)' = \dfrac{...}{...} = \dfrac{\_(2x+1)-(x^2+1)\_}{(2x+1)^2} = \dfrac{\_\,x^2+x-\_\,x^2-2}{(2x+1)^2} = \dfrac{\_+\_-\_}{(2x+1)^2}.$

Завдання-І-1-4

1. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{4-x^2}$; б) $y=\sqrt{x^2-0{,}36}$; в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6}}$.

Розв'язок:

1) Відомо, що $\sqrt{g(x)}$ визначений при $g(x)\geq 0$.

2) Дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. має зміст при $g(x)\neq 0$.

3) $a^2+b^2=(a-b)(a+b)$.

а) $y=\sqrt{4-x^2}$

D(y): $4-x^2 \,\_\_\, 0 \Leftrightarrow (...)(...) \,\_\_\, 0 \Leftrightarrow$

$\geq \leq$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \ge 0 \\ 2+x \_\_ 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} 2-x \_\_ 0 \\ 2+x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \_\_ 2 \\ x \_\_ -2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x \_\_ 2 \\ x \_\_ -2 \end{cases} \Leftrightarrow \_\_\_ \le x \le \_\_\_ \text{ або } \varnothing.$$

Відповідь: [___; ___].

б) $y = \sqrt{x^2 - 0{,}36}$

D(y): $x^2 - 0{,}36 \_\_ 0 \Leftrightarrow (x - \_\_)(\_\_ + 0{,}36) \ge 0 \Leftrightarrow$

$\ge \le$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-0{,}6 \_\_ 0 \\ x+0{,}6 \ge 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x-0{,}6 \le 0 \\ x+0{,}6 \_ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \_\_ \\ x \_\_ -0{,}6 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x \_\_ 0{,}6 \\ x \le -0{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

x ____ __ *або* *x* ____ __

$\ge \le$ $\ge \le$

Відповідь: (___; ___] $\cup$ [___; ___) .

в) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6}}$.

Так як $\sqrt{x^2 - 6}$ стоїть в знаменнику дробу,то D(y):

$x^2 - 6 \_\_\_\_ 0 \Leftrightarrow (x - \_\_)(\_\_ + \sqrt{6}) \succ 0 \Leftrightarrow$

$\ge \le \ne$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \_\_\_\_\_\, 0 \\ x+\sqrt{6}\ \pi\ 0 \end{cases} або \begin{cases} x - \_\_\_\_\_\, 0 \\ x + \_\ \phi\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ \_\_\ \sqrt{6} \\ x\ \_\_ -\sqrt{6} \end{cases} або \begin{cases} x\ \_\_\ \sqrt{6} \\ x\ \_\_ -\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

__________ *або* ___ $< x <$ ___

Відповідь: (___ ; ___) $\cup$ (___ ; ___).

2. Знайти похідну функції:

а) xcosx; б) $\sin^3 x$; в) $2tgx+3ctgx.$

Розв'язання

а) Похідна функції обчислюється за формулою: $(uv)' = u'v + uv'.$

$(x\cos x)' = (...)'\cos x + x\,(...)' = \_ - x\cdot\_.$

б) $\sin^3 x$ - складена функція, похідна складеної функції h(x) обчислюється за формулою: $h'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$

$(\sin^3 x)' = ?\ h(x) = \sin^3 x,\ g(y) = y^{\_},$ *f(x)=sinx.*

$g'(y) = \_\,y^{\_},\quad f'(x) = (\sin x)' = \_$

$h'(x) = \_\,y^{\_}\cdot\_ = \_\sin^{\_} x\cdot\_$

в) Похідна суми рівна сумі похідних: $(u+v)' = u' + v'$

$(2tgx + 3ctgx)' = (...)' + (...)' = \_(tgx)' + 3(...)' = \_\_ - \_\_$

Завдання І-2-1

1. Знайдіть тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції f в даній точці

   а) $f(x) = -2x^2$, M(-2;-8);

   б) $f(x) = \frac{3}{x}, M(1;3)$

Розв'язання

Відомо, що $tg\alpha = f'(x_0)$, де x_0 - абсциса точки дотику.

а) $f(x) = -2x^2; M(-2;-8)$

$f'(x) = (-2x^2)' = \_(x^2)' = \_\ x$

$f'(x_0) = f'(-2) = \_\_(-2) = \_\_$

$tg\alpha = \_$

б) $f(x) = \frac{3}{x}, M(1;3).$

$f'(x) = \left(\frac{3}{x}\right)' = (3x^{-})' = \_\ x^{-}$

$f'(x) = f'(...) = \_$

$tg\alpha = \_$

Напишіть рівняння дотичної до графіка функції f в точках з даною абсцисою:

а) $f(x) = 2x^2; x = -1;$

б) $f(x) = x^3; x = 2$

Розв'язання

Відомо, що рівняння дотичної таке:

$y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$ або $y = f(x_0) + f(x_0)(x - x_0)(1)$

Щоб написати рівняння дотичної до кривої в точці з абсцисою x_0 потрібно:

1) Обчислити $f(x_0)$
2) Знайти $f'(x)$ і обчислити її значення в точці x_0, тобто $f'(x_0)$.
3) Підставити знайдені числа у рівняння (1)

а) $f(x) = 2x^2, x = -1$

$x_0 = -1, f(-1) = \_(...)^2 = \_$

$f'(x) = (2x^2)' = \_(x^2)' = \_\_, f'(-1) = \_\_\_\_.$

y=2+__(x+1).

б) $f(x) = x^3, x = 2$

$x_0 = 2, f(2) = (...)^3 = \_$

$f'(x) = (x^3)' = \_\,x^{-}$ $f'(2) = \_(2)^{-}$=__

$y = 8 + \_(x - 2) = \_$